UNIVERSIDAD DE CASTILLA-LA MANCHA

Pruebas de acceso a estudios universitarios (Bachillerato L.O.G.S.E.) **SEP - 05**

Materia: **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**

Esta prueba consta de cuatro bloques de dos ejercicios A) y B) cada uno.
El/la alumno/a debe resolver cuatro ejercicios, uno de cada bloque.
Cada ejercicio tiene una puntuación máxima de 2,5 puntos.
Se puede utilizar cualquier tipo de calculadora.

BLOQUE 1

A) 1) Despeja la matriz X en la ecuación: $A \cdot X + A^{-1} \cdot X = I$ siendo A^{-1} la matriz inversa de A.

2) Hallar la matriz X sabiendo que $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

A)

1) $AX + A^{-1} \cdot X = I \Rightarrow (A+A^{-1}) \cdot X = I \Rightarrow (A+A^{-1})^{-1} \cdot (A+A^{-1}) \cdot X = (A+A^{-1})^{-1} \cdot I$

luego $X = (A+A^{-1})^{-1}$

2)

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow Adj(A^t) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

llamemos $B = A + A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow |B| = -10$

$$B^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow Adj(B^t) = \begin{pmatrix} -5 & 3 & -4 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow B^{-1} = \frac{Adj\, B^t}{-10} = \begin{pmatrix} 1/2 & -3/10 & 2/5 \\ 0 & 1/5 & 2/5 \\ 0 & 2/5 & -1/5 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1/2 & -3/10 & 2/5 \\ 0 & 1/5 & 2/5 \\ 0 & 2/5 & -1/5 \end{pmatrix}$$

B) Los 30 alumnos de un grupo de 4º de ESO cursan tres asignaturas optativas distintas: Francés, Cultura Clásica y Energías alternativas. Si dos alumnos de Francés se hubiesen matriculado de Cultura Clásica, entonces estas dos asignaturas tendría el mismo número de alumnos. Si dos alumnos de Cultura Clásica se hubiesen matriculado en Energías Alternativas, entonces Energías Alternativas tendría doble número de alumnos que Cultura Clásica. Halla el número de alumnos matriculado en cada asignatura.

B)

x = nº alumnos de Francés
y = nº " " C.C.
z = nº " " E.A.

$$\left.\begin{aligned} x+y+z &= 30 \\ x-2 &= y+2 \\ z+2 &= 2(y-2) \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} x+y+z &= 30 \\ x-y &= 4 \\ 2y-z &= 6 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{I+III} \left.\begin{aligned} x+y+z &= 30 \\ x-y &= 4 \\ x+3y &= 36 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{III-II} \left.\begin{aligned} x+y+z &= 30 \\ x-y &= 4 \\ 4y &= 32 \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow \boxed{y = 8 \Rightarrow x = 12 \Rightarrow z = 10}$$

BLOQUE 2

A) Una empresa de autobuses de diversos tipos y capacidades dispone, en un determinado día, de un máximo de 7 conductores y de 6 conductoras. Recibe el encargo de transportar a los 528 alumnos de un centro docente con el fin de realizar una excursión de un día de duración. Si un conductor maneja un autobús de 44 plazas, entonces las conductoras deben manejar obligatoriamente los de 66 plazas. Por el contrario, si una conductora maneja un autobús de 24 plazas, entonces los conductores deben manejar obligatoriamente los de 72 plazas. La cantidad que cobra la empresa es de 500 euros al día por conductor, independientemente de si es hombre o mujer. **1)** Representa la región factible. **2)** Determina el número de conductores y el número de conductoras para que el beneficio empresarial sea máximo. **3)** Calcula ese beneficio máximo

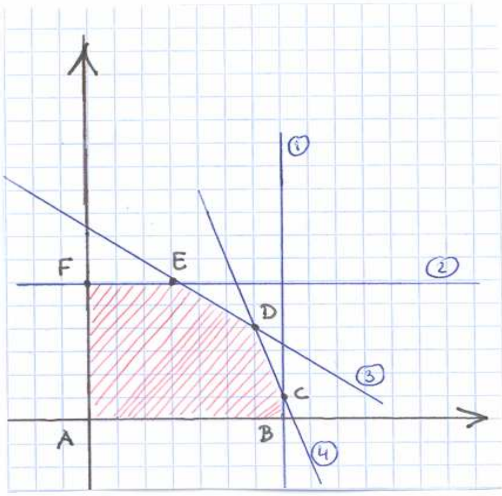
A)

nº conductores $= x$

nº conductoras $= y$

Beneficio $= B = 500x + 500y$ (función objetivo)

$$\left.\begin{array}{l} x \le 7 \\ y \le 6 \\ 44x + 66y \le 528 \\ 72x + 24y \le 528 \\ x \ge 0 \; ; \; y \ge 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} ① \\ ② \\ ③ \longrightarrow 2x + 3y = 24 \quad \begin{array}{c|cc} x & 0 & 12 \\ \hline y & 8 & 0 \end{array} \\ ④ \longrightarrow 3x + y = 22 \quad \begin{array}{c|cc} x & 4 & 7 \\ \hline y & 10 & 1 \end{array} \\ \end{array}$$



$A = (0,0)$

$B = (7,0)$

$C = ① \cap ④ = (7,1)$

$D = ③ \cap ④ = (6,4)$

$E = ② \cap ③ = (3,6)$

$F = (0,6)$

Beneficio $(A) = B(A) = 0$; $B(B) = 3500$; $B(C) = 4000$

$B(D) = 5000$; $B(E) = 4500$; $B(F) = 3000$

El beneficio máximo se alcanza en el punto $D = (6,4)$

$\boxed{\begin{array}{l}\text{conductores} = 6 \\ \text{conductoras} = 4\end{array}}$ $\boxed{\text{Beneficio máximo: } 5000 \text{ €}}$

B) Se truca una moneda de forma que la probabilidad de salir cara es doble que la de salir cruz. Si se lanza tres veces esta moneda. **1)** Calcula el espacio muestral para este experimento. **2)** Calcula la probabilidad de obtener dos cruces y una cara.

B)

Cara $= C$; Cruz $= X$

$p(C) = 2p(X)$; como ha de ocurrir que $p(C) + p(X) = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2p(X) + p(X) = 1 \Rightarrow 3p(X) = 1 \Rightarrow p(X) = \frac{1}{3}$ y $p(C) = \frac{2}{3}$

1) El espacio muestral es $\Omega = \{CCC, CCX, CXC, XCC, XXC, XCX, CXX, XXX\}$

2) $p(2 \text{ cruces y } 1 \text{ cara}) = p(XXC) + p(XCX) + p(CXX) = 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \boxed{\frac{2}{9}}$

BLOQUE 3

A) Dada la función f(x) = $\begin{cases} 3 & \text{si} \quad x \le -2 \\ x^2 - x - 2 & \text{si} \quad -2 < x \le 2 \\ -x + 2 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$ **1)** Representa gráficamente f. **2)** Estudia su continuidad. **3)** Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f y eje de abcisas.

A)

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si} \quad x \le -2 \\ x^2 - x - 2 & \text{si} \quad -2 < x \le 2 \\ -x + 2 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

1) el primer trozo es una función constante

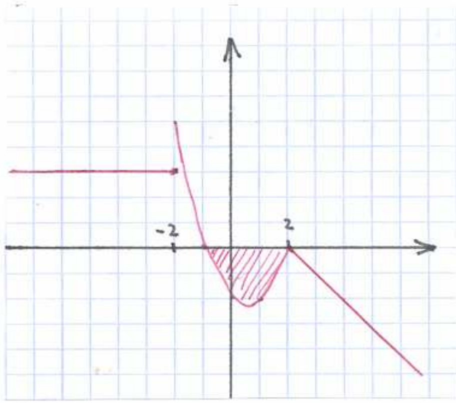
el segundo " " " parábola de vértice

$x = 1/2$;

x	1/2	0	1	-1	2	-2
y	-9/4	-2	-2	0	0	4

el tercer trozo es una recta que pasa por los puntos

x	2	4
y	0	-2



2) Sólo habrá problemas de continuidad en los puntos -2 y 2

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^-} 3 = 3 \\ \lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to -2^+} (x^2 - x - 2) = 4 \end{array}\right\} f(x) \text{ no es continua en el punto } -2$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (x^2 - x - 2) = 0 \\ \lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (-x + 2) = 0 \end{array}\right\} f(x) \text{ es continua en el punto } 2$$

$$\boxed{\text{Luego } f(x) \text{ es continua en } \mathbb{R} - \{-2\}}$$

3) $$\text{Área} = \left| \int_{-1}^{2} (x^2 - x - 2)\, dx \right| = \left| \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x \right]_{-1}^{2} \right| = \left| \frac{8}{3} - 6 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2 \right| = \boxed{\frac{9}{2}}$$

B) Cierta entidad financiera lanza al mercado un plan de inversión cuya rentabilidad, R en euros viene dada por: R = -0,01 x^2 + 5 x + 2500, siendo x la cantidad que se invierte. **1)** ¿Qué rentabilidad obtiene un inversor que invierte 1000 euros? **2)** ¿Cuánto ha de invertir si quiere obtener una rentabilidad máxima? **3)** Calcula esa rentabilidad máxima.

B)

$R(x) = -0'01x^2 + 5x + 2500$ $\quad$ x = cantidad que se invierte

1) $R(1000) = -0'01 \cdot 10^6 + 5000 + 2500 = \boxed{-2500}$

2) $R'(x) = -0'02x + 5$

$R' = 0 \Rightarrow -0'02x + 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{0'02} = 250$

$R''(x) = -0'02$

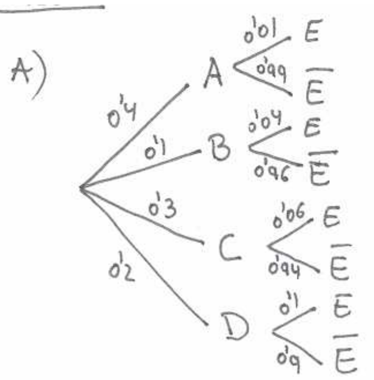
$R''(250) = -0'02 < 0 \Rightarrow \boxed{x = 250 \text{ es máximo}}$

3) $\text{Rent. máxima} = R(250) = -0'01 \cdot 62500 + 1250 + 2500 = \boxed{3125\text{ €}}$

BLOQUE 4

A) En una oficina trabajan 4 secretarias que archivan documentos. Cada una de ellas archiva el 40%, 10%, 30% y 20%, respectivamente, de los documentos. La probabilidad que tiene cada una de ellas de equivocarse al archivar es 0´01, 0´04, 0´06 y 0´1 respectivamente. **1)** Cuál es la probabilidad de que un documento esté mal archivado? **2)** Si se ha encontrado un documento mal archivado, ¿cuál es la probabilidad de que sea debido a la tercera secretaria?

A)



Llamamos E = equivocarse

$\overline{E}$ = no equivocarse

1) $p(E) = p(A)\cdot p(E/A) + p(B)\cdot p(E/B) + p(C)\cdot p(E/C) + p(D)\cdot p(E/D) =$

$= 0'4\cdot 0'01 + 0'1\cdot 0'04 + 0'3\cdot 0'06 + 0'2\cdot 0'1 =$

$= \boxed{0'046}$ Hemos aplicado el teorema de la probabilidad total

2) Nos piden $p(C/E) \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Teorema} \\ \text{de} \\ \text{Bayes}}}{=} \dfrac{p(C)\cdot p(E/C)}{p(E)} = \dfrac{0'3\cdot 0'06}{0'046} = \boxed{0'3913}$

B) Un experto en gestión de calidad quiere estudiar el tiempo promedio que se necesita para hacer tres perforaciones en una pieza metálica. Se calcula el tiempo promedio de una muestra aleatoria de 36 trabajadores, resultando 2´6 segundos. Suponiendo que el tiempo de perforación se distribuye según una normal con desviación típica 0´3 segundos, **1)** encontrar un intervalo de confianza del 99´4% para dicho tiempo promedio de perforación. **2)** Interpreta el significado del intervalo obtenido.

B) Intervalo de confianza para la media poblacional μ, conocida la desviación típica $\sigma = 0'3$ sabiendo que se distribuye según una $N(\mu, 0'3)$

1) $\mu \in \left(\overline{X} - Z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \overline{X} + Z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

siendo $\overline{X} = 2'6$ la media muestral

$n = 36$ tamaño de la muestra

Nivel de confianza $= 1-\alpha = 0'994 \Rightarrow \alpha = 0'006 \Rightarrow \alpha/2 = 0'03$

$1 - \alpha/2 = 0'997 \Rightarrow$ (mirando las tablas de $N(0,1)$) $Z_{\alpha/2} = 2'75$

$\mu \in \left(2'6 - 2'75\cdot\dfrac{0'3}{\sqrt{36}}\ ,\ 2'6 + 2'75\cdot\dfrac{0'3}{\sqrt{36}}\right) = \boxed{(2'4625\ ,\ 2'7375)}$

2) La confianza de que la media poblacional o que el tiempo promedio de perforación esté en ese intervalo es del 99'4 %