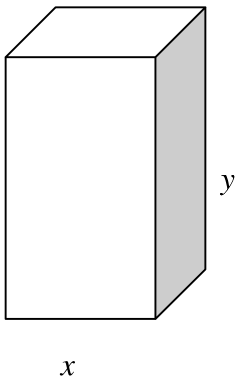
Universidad de Castilla-La Mancha
Pruebas de Acceso a Estudios Universitarios Bachillerato (LOGSE)
Materia: **MATEMÁTICAS II**

SEP 05

La prueba consta de cuatro bloques de dos preguntas cada uno. Debes contestar una pregunta de cada bloque. Cada pregunta puntúa de cero a 2'5 puntos. Puedes usar cualquier tipo de calculadora.

PRIMER BLOQUE

A. De todos los prismas rectos de base cuadrada y tales que el perímetro de una cara lateral es de 30 cm, halla las dimensiones del que tiene volumen máximo.



Perímetro de cara lateral 2x+2y=30 ◊ x+y=15 ◊ y = 15-x
Volumen prisma = (área base) x (altura) = $x^2 \cdot y$
$V = x^2\cdot(15-x) = 15x^2-x^3$ ◊ $V' = 30x-3x^2 = 0$ ◊ $x = 0$ *ó* $x = 10$
$V'' = 30-6x$ ◊ $V''(10) = -30 < 0$ ◊ *x = 10 es un mínimo relativo.*
El mínimo absoluto se alcanzará en los extremos del intervalo [0,15] o en el mínimo relativo.
$V(0) = 0$; $V(15) = 0$; $V(10) = 500$
Si descartamos los valores 0 y 15 por obvios, no squeda que el mínimo se Alcanza en x = 10 ◊ y = 5 $\boxed{\text{Sol: } x = 10 \text{ cm} ; y = 5 \text{ cm}}$

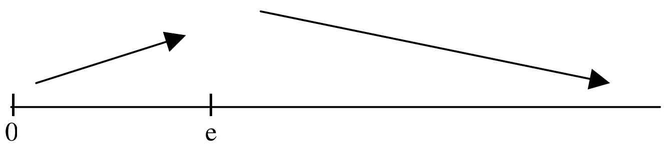
B. Estudia el crecimiento y la concavidad de la función $f : (0,+\infty) \to R$ **definida por** $f(x) = \dfrac{Lx}{x}$. **(L = logaritmo neperiano)**

Observemos que Dom f= (0, +•). Hallamos las derivadas primera y segunda para estudiar el crecmiento y la concavidad.

$y' = \dfrac{1-Lx}{x^2}$; $y' = 0 \Rightarrow 1 - Lx = 0 \Rightarrow Lx = 1 \Rightarrow x = e$

$y'(1) = 1 > 0 \Rightarrow$ *En* $(0,e)$ *la función es creciente*

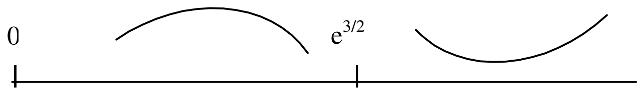
$y'(10) = -0{,}013 < 0 \Rightarrow$ *En* $(e,+\infty)$ *es decreciente*



$y'' = \dfrac{2Lx-3}{x^3}$; $y'' = 0 \Rightarrow 2Lx - 3 = 0 \Rightarrow Lx = \dfrac{3}{2} \Rightarrow x = e^{3/2} \approx 4{,}481$

$y''(1) = -3 < 0 \Rightarrow$ *En* $(0, e^{3/2})$ *es convexa*

$y''(10) = 0{,}0016 > 0 \Rightarrow$ *En* $(e^{3/2}, \infty)$ *es cóncava*



SEGUNDO BLOQUE

A. a) Halla los valores de los coeficientes *b*, *c* y *d* para que la gráfica de la función $y = x^3 + bx^2 + cx + d$ **corte al eje OY en el punto (0,-1), pase por el punto (2,3) y, en ese punto, tenga tangente paralela al eje OX.**

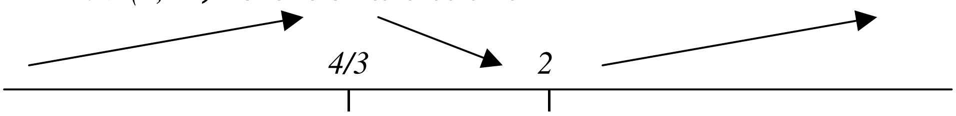
b) Una vez hallados esos valores, halla los máximos y mínimos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la citada función.

a) Como corta al eje OY en (0,-1) ◊ y(0)= -1 ◊ y(0) = d = -1
Como pasa por el punto (2,3) ◊ y(2) = 3 ◊ 8+4b+2c-1=3 ◊ 4b+2c=-4
Como en (2,3) la tangente es paralela al eje OX ◊ en x = 2 hay un máximo o un mínimo ◊ y'(2)=0
y'=3x²+2bx+c ◊ y'(2) = 12+4b+c = 0 ◊ 4b+c=-12

Resolviendo el sistema $\left.\begin{array}{l} 4b+2c = -4 \\ 4b + c = -12 \end{array}\right\}$ *obtenemos que b = -5 y c = 8*

$\boxed{Sol: b = -5;\ c = 8;\ d = -1}$

b) Tenemos pues que la función es y = x^3*-5x+8x-1*
Hacemos el estudio de la derivada primera para ver el crecimiento y los máximos y mínimos:
y'= $3x^2$*-10x+8 ◊ Si y' = 0 ◊* $3x^2$*-10x+8 = 0 ◊ x = 2 ; x = 4/3*
y'(0)=8 > 0 ◊ en (-•,4/3) la función es creciente
y'(1,5) = -0,25 < 0 ◊ en (4/3, 2) la función es decreciente
y'(3) = 5 > 0 en (2, •) la función es creciente



Luego en x = 4/3 hay un máximo y en x = 2 hay un mínimo

B. Calcula la primitiva de $\int \frac{x+\sqrt{x}}{x^2}dx$**.**

Hacemos el cambio x = t^2 *◊ dx = 2t dt*

$$\int \frac{x+\sqrt{x}}{x^2}dx = \int \frac{t^2+t}{t^4}2tdt = 2\int \frac{t+1}{t^2}dt = 2\left(\int \frac{t}{t^2}dt + \int \frac{1}{t^2}dt\right) = 2\cdot\left(\ln t - \frac{1}{t}\right) = 2\ln\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} =$$

$$= \ln x - \frac{2}{\sqrt{x}} + C$$

TERCER BLOQUE

A. a) Discute, en función de los valores de *m*, el siguiente sistema: $\left.\begin{array}{r} 2x-3y=0 \\ x-y+z=0 \\ x+2y+mz=m \end{array}\right\}$

b) Resuelve, en los casos de compatibilidad, el sistema anterior.

a) Estudiemos los rangos de las matrices de los coeficientes y ampliada:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & m & m \end{array}\right) ; \begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & m \end{vmatrix} = m-7 \ ; \ m-7=0 \Rightarrow m=7$$

i) Si m • 7 ◊ rg MC = rg MA = 3 ◊ S.C.D.

ii) *Si m = 7 ◊ rg MC = 2 y rg MA = 3 ◊ S.I. porque:*

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & \vline & 0 \\ 1 & -1 & 1 & \vline & 0 \\ 1 & 2 & 7 & \vline & 7 \end{pmatrix} \; ; \; \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \Rightarrow rg\,MC = 2 \; ; \begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 7 \neq 0 \Rightarrow rg\,MA = 3$$

b) Resolvámoslo cuando es compatible determinado ◊ caso i)

Aplicamos la Regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ m & 2 & m \end{vmatrix}}{m-7} = \frac{-3m}{m-7}; \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & m & m \end{vmatrix}}{m-7} = \frac{-2m}{m-7}; \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & m \end{vmatrix}}{m-7} = \frac{m}{m-7}$$

B. Se consideran las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \mathrm{m} \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ **y** $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \mathrm{m} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$**,**

donde *m* es un número real. Encuentra los valores de *m* para los que A·B tiene inversa.

$A \cdot B$ tendrá inversa siempre que su determinante ea distinto de cero:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2m & 2+2m \\ 1-m & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |A \cdot B| = \begin{vmatrix} 1+2m & 2+2m \\ 1-m & 0 \end{vmatrix} = -(2+2m)\cdot(1-m)$$

$$-(2+2m)\cdot(1-m) = 0 \;\Rightarrow m = 1,\; m = -1$$

Luego $A \cdot B$ tiene inversa para todos los valores de m distintos de 1 y de -1

CUARTO BLOQUE

A. Calcula la ecuación de una recta que pasa por el punto de intersección del plano $\pi \equiv x + y - z + 6 = 0$ **con la recta** $s \equiv \frac{x}{3} = y - 2 = z + 1$ **y es paralelo a la recta** $r \equiv \begin{cases} 3x + y - 4 = 0 \\ 4x - 3y + z - 1 = 0 \end{cases}$**.**

Llamaremos a larecta que nos piden "t". Como t || r ◊ el vector de dirección de r será el de t

$$\vec{v}_r = (3,1,0) \wedge (4,-3,1) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \end{vmatrix} = (1,-3,-13)$$

Un punto de la recta pedida t será el de intersección de la recta s con el plano π. Para ello resolveremos el sistema formado por el plano y la recta en su forma para métrica:

$$\left.\begin{array}{l}\pi \equiv x+y-z+6=0 \\ s\equiv\begin{cases}x=3\lambda \\ y=2+\lambda \\ z=-1+\lambda\end{cases}\end{array}\right\} \Rightarrow (por\ sustitución)\ 3\lambda+2+\lambda+1-\lambda+6=0 \Rightarrow 3\lambda+9=0 \Rightarrow \lambda=-3$$

Luego el punto P (-9, -1, -4)   y así la recta t pedida en su forma continua será:

$$t \equiv \frac{x+9}{1}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z+4}{-13}$$

B. Dados los puntos A(1,-2,3) y B(0,2,1), se pide:

a) la ecuación paramétrica de la recta que pasa por ambos puntos;

b) la ecuación del plano π que está a igual distancia de A y B;

c) la distancia al origen de la recta intersección del plano $2y-z=0$ con el plano π del apartado b).

Llamaremos a dicha recta "r". Su vector director será $\overrightarrow{AB}=(-1,4,-2)$

Luego la ecuación paramétrica de r será $r\equiv\begin{cases}x=1+t \\ y=-2+4t \\ z=3-2t\end{cases}$

El plano pedido será el perpendicular a la recta que une A y B (r) y que pasa por el punto medio del segmento AB. Este punto medio es M= (1/2, 0, 2).

El vector normal del plano ð es el vector de dirección de r ◊ $\vec{n}=(-1,4,-2)$ *por lo que la ecuación del plano ð será ð• -x+4y-2z+d=0 y obligando a que pase por el punto M, tendremos –1/2+0-4+d=0 ◊*
◊ d = 9/2 ◊ ð• -x+4y-2z+9/2=0 ◊ $\boxed{ð\bullet\ 2x\text{-}8y\text{+}4z\text{-}9\text{=}0}$

Hallamos la intersección de los dos planos resolviendo el sistema formado por ambos:

$$\left.\begin{array}{l}2x-8y+4z-9=0 \\ 2y-z=0\end{array}\right\} \Rightarrow z=2y \Rightarrow 2x-8y+8y-9=0 \Rightarrow x=9/2$$ *Se trata de una recta que en su*

forma paramétrica es $s\equiv\begin{cases}x=9/2 \\ y=\lambda \\ z=2\lambda\end{cases}$ *que pasa por el punto P(9/2, 0, 0) y su vector director es* $\vec{v}$ *=(0,1,2)*

La distancia del origen O a esta recta s viene dada por $d(O,s)=\dfrac{\left|\overrightarrow{OP}\wedge\vec{v}\right|}{|\vec{v}|}=\dfrac{|(9/2,0,0)\wedge(0,1,2)|}{|(0,1,2)|}=$

$$=\frac{\begin{vmatrix} i & j & k \\ 9/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\end{vmatrix}}{\sqrt{1+4}}=\frac{|(0,-9,9/2)|}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{81+81/4}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{405/4}}{\sqrt{5}}=\frac{9}{2}$$

-------------------ooooOOOOOoooo--------------------